

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro “*Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*” es la parte práctica del libro anterior llamado “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil	1
Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.	
Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble	29
Christian Boissinotte	
Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones	49
José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.	
Capítulo 4: Horas de luz solar	63
Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.	
Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento	73
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas	83
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales	91
Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.	
Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización	101
José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.	
Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones	125
César Fabián Romero Félix	
Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura	149
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 11: Antenas telefónicas	162
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra	173
Fernando Hitt	
Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia	179
Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.	
Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles	187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra

Secuencia didáctica

Fernando Hitt¹

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de un paquete de cómputo como el de GeoGebra y GeoGebra CAS.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Potencia, polinomios, resolución de ecuaciones, visualización matemática, representaciones gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: Resolución de ecuaciones en donde un paquete de cómputo como GeoGebra tiene limitaciones tanto de corte gráfico como resolución algebraica (GeoGebra CAS); Sin embargo, estas restricciones pueden servir para realizar exploraciones importantes (ligadas a la creatividad en un acercamiento de aprendizaje basado en la indagación) con el paquete, con la finalidad de promover la visualización matemática y una articulación entre los procesos algebraicos y gráficos.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años) y primer año de universidad (18 a 19 años).

Total de actividades y duración aproximada

Una actividad, para realizarse en dos sesiones de 2 horas (para las primeras 3 etapas de ACODESA). La etapa de autorreflexión se realiza en casa o en otra sesión. La institucionalización se realiza en la 2ª sesión de 15 minutos.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante,
- Archivo GeoGebra para ayudar exclusivamente al profesor en la fase de institucionalización utilizando el método de enseñanza ACODESA,
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes,
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales),
- Hojas de papel, bolígrafos de color azul, rojo y verde, para identificar cada una de las etapas de trabajo según el método de enseñanza ACODESA.

Método o recomendaciones de enseñanza

¹ Université du Québec à Montréal, Canada.

Las hojas de trabajo de la actividad se han elaborado siguiendo el método de enseñanza ACODESA (ver Cortés, Hitt & Saboya, 2016) : a) Trabajo individual, b) Trabajo en equipo, c) Trabajo en gran grupo, d) Autorreflexión, y e) Proceso de institucionalización.

Recordemos brevemente que el método ACODESA (ver Hitt y Quiroz, 2019a) tiene un soporte teórico de una teoría sociocultural basada en una perspectiva vigotskiana (Vygotsky, 1932) junto con un acercamiento de la teoría de la actividad de Leontiev (1978). Es aconsejable constituir equipos de 2 o 3 personas y no más (ver por ejemplo las sugerencias de Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2013).

Se intenta propiciar en el aula un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas.

Es usual que los estudiantes inicien ya sea con ideas de utilizar logaritmos para resolver la ecuación. La discusión en equipo y en gran grupo, generalmente implica el abandono de esta estrategia ya que en lugar de simplificar la ecuación, la vuelve más compleja para su solución.

Los alumnos que proponen resolver la ecuación $p(x) = 1$; y/o $q(x) = 0$, generalmente encuentran los valores que GeoGebra también muestra en pantalla; y con el uso de GeoGebra CAS les proporciona el mismo resultado.

No es hasta que se les propone que visualicen las funciones por separado; es decir, las funciones p y q con la ayuda de GeoGebra que los estudiantes se pueden llegar a percatar de la existencia de otras soluciones. Generalmente es en la discusión en gran grupo que el profesor sugiere esta idea.

Es crucial en la discusión en gran grupo, que el profesor guíe la discusión de manera apropiada para que sean los estudiantes quienes construyan el conocimiento de acuerdo con el método ACODESA.

La fase de “Autorreflexión” de acuerdo al método de enseñanza ACODESA (reconstrucción individual de lo realizado en clase), es crucial para que el estudiante asimile lo realizado en clase y se establezca el conocimiento.

Finalmente, en la fase de “Institucionalización”, el profesor podrá utilizar los archivos de GeoGebra que se han proporcionado para esta actividad.

A continuación, presentamos la actividad que se propone para utilizar directamente en el aula.

Referencias

- Cortés C., Hitt F. & Saboya M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP)*, 30(54), 240-264.
- Hitt, F., and Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*. 73, 153-177.
- Hitt, F. y Quiroz, S. (2019a). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 1-25). México : AMIUTEM.

- Hitt, F. et Quiroz, S. (2019b). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.
- Leontiev, A. (1978). Activity, consciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.
- Prusak, N., Hershkowitz R. & Schwarz B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), pp. 266-285.
- Vygostky, L. (1932/1962). *Thought and Language*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Visualización matemática y GeoGebra

<p>Nombre del alumno: _____</p> <p>Nombre de los miembros del equipo: _____</p> <p>Grupo: _____</p> <p>Fecha: _____</p>	<p><u>Instrucciones:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Para la primera actividad individual, utiliza tinta azul. ▪ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza tinta roja. ▪ En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza tinta verde. <p>Visualización y resolución de problemas</p>
---	---

Situación y trabajo individual (1ª etapa)

1. A continuación se presenta el enunciado siguiente². Encuentre todos los valores reales que satisfagan la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$.

a) Antes de pasar a un desarrollo algebraico, inicia tu reflexión sobre lo que se te solicita, analizando cuidadosamente los elementos que constituyen la expresión algebraica de manera que te permita construir una estrategia de ataque.

Enunciar la estrategia global de ataque al problema:

b) Una vez que has construido una estrategia, intenta comprender mejor la situación desde un punto de vista gráfico (utiliza GeoGebra). Inicia un proceso de visualización, buscando los elementos clave de la representación gráfica que te puedan ayudar en ese proceso y que te permita ligarlo con la estrategia de ataque.

c) Si la representación gráfica es compleja, es conveniente analizar la expresión algebraica en partes. Por ejemplo, analizar la representación gráfica del polinomio $x^2 - 5x + 5$ y del polinomio $x^2 - 9x + 20$, intentando visualizar los elementos pertinentes, que permitan proporcionarle un sentido visual a la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$. Este proceso te permitirá construir una estructura cognitiva de control sobre los procesos algebraicos.

² Problema del National Council of Teachers of Mathematics. (1988, p. 19). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Trabajo en equipo (GeoGebra y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (2ª etapa).

2. Discute con tus compañeros de equipo los resultados que has encontrado en el trabajo individual. ¿El trabajo en equipo proporciona nuevas ideas? ¿Una nueva estrategia de ataque?
3. De acuerdo a la estrategia, resolver algebraicamente lo solicitado.

Trabajo en equipo (GeoGebra y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (3ª etapa)

4. Discute con tus compañeros de equipo el proceso visual de manera que te permita construir un enunciado similar para la resolución de una ecuación que contenga varias soluciones enteras (no necesariamente todas).
 - a) ¿Cuál sería su proposición de una nueva ecuación de la forma $(p(x))^{q(x)} = 1$?
 - b) ¿Qué soporte gráfico podrías proporcionar para mostrar tu construcción de la ecuación? Proporciona una explicación y una evidencia visual utilizando GeoGebra y capturando pantallas para apoyar tu explicación.
 - c) ¿Cuál es la solución algebraica?

El profesor recoge todas las producciones de los alumnos y proporciona un nuevo cuestionario

4ª Etapa de autorreflexión (reconstrucción individual de lo realizado en clase)

5. En un nuevo cuestionario, resuelve individualmente la misma actividad, y proporciona una ecuación diferente a las encontradas en el trabajo en equipo y en gran grupo de las etapas precedentes.

5ª Etapa proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las estrategias de resolución de la actividad y explica la importancia de los procesos de visualización (con apoyo tecnológico) para promover la construcción de una estructura de control sobre la actividad matemática en la resolución de problemas del mismo tipo al realizado en esta actividad.